

Bitcoin à l'actif d'un assureur : quel choc S2 appliquer ?

Ibrahima DOUMBIA, Moustapha ASSANE IDE, Areski COUSIN
Nexialog Consulting, Paris, France

14 octobre 2024

Résumé

Dans le contexte du calcul du SCR Solvabilité II, cette étude compare différentes méthodologies pour calibrer un choc S2 bitcoin en utilisant une approche analogue à la calibration du choc action S2. Ces travaux anticipent une évolution future de la réglementation autorisant les assureurs vie à intégrer les cryptoactifs, notamment le bitcoin, dans leurs portefeuilles d'investissement. L'étude propose une série de valeurs potentielles de chocs pour le bitcoin selon les approches explorées, avec une sélection finale fixant le niveau de choc bitcoin à 84%.

Mots-clés : Solvabilité 2, bitcoin, crypto-actifs, ajustement paramétrique, modélisation stochastique, MSAR, VaR, choc S2.

Table des matières

Introduction	2
1 Cadre de l'étude	3
1.1 Rendement relatif ou log-rendement ?	3
1.2 Critères de sélection de modèles	4
1.3 Méthodologie de l'EIOPA pour le calibrage du choc action	5
1.4 Approche paramétrique du calibrage du choc bitcoin.	5
1.4.1 Calibrage sur 12 années d'historique	5
1.4.2 Calibrage sur l'historique journalier des rendements annuels glissants	6
1.5 Approche stochastique du calibrage du choc	6
1.6 Analyse statistique des données	6
1.6.1 Historique d'observations journalières	6
1.6.2 Historique d'observations annuelles	7
2 Approches paramétriques du calibrage du choc	8
2.1 Choix des lois paramétriques	8
2.2 Calibrage du choc sur les historiques de rendements annuels	8
2.3 Synthèse de l'approche paramétrique	9
3 Approche stochastique du calibrage du choc	10
3.1 La famille de modèles MSAR	10
3.2 Calibrage du choc bitcoin à partir du modèle MSAR obtenu	11
3.2.1 Calibrage à partir des log-prix simulés	11
3.2.2 Calibrage du choc avec les log-rendements simulés	12

3.3 Synthèse des deux approches	12
Conclusion	13
Références	14
A Approche paramétrique de calibrage du choc	15
A.1 Calibrage du choc par la loi normale	15
A.2 Calibrage du choc par la loi GEV	15
A.3 Calibrage du choc par les lois hyperboliques généralisées (GHD)	16
A.4 Calibrage du choc utilisant la loi GPD	16
B Approche stochastique du calibrage du choc	18
B.1 Quelques éléments théoriques sur le modèle MSAR	18
B.2 Calibration du modèle MSAR	19
B.2.1 Sur l'historique journalier les log-prix	19
B.2.2 Sur l'historique journalier les log-rendements	22
B.3 Backtesting du modèle MSAR	24
B.3.1 Backtesting du modèle MSAR ajusté sur les log-prix	24
B.3.2 Backtesting du modèle MSAR ajusté sur les log-rendements	26
Contacts	28

Introduction

L'évolution récente du paysage financier mondial, marquée par l'essor des cryptomonnaies et des crypto-actifs, attire de plus en plus l'attention des investisseurs institutionnels. Pour les assureurs vie, dont les actifs sont constitués des placements financiers réalisés à partir des primes collectées, cette tendance pourrait offrir de nouvelles opportunités d'investissement stratégique. En effet, le rapport annuel de Binance Research (2019), une division de Binance spécialisée dans l'analyse du secteur des actifs numériques, met en lumière les avantages des crypto-actifs en tant qu'investissements. Selon cette étude, ces actifs offrent non seulement un fort potentiel de rendement sur le long terme, mais aussi un effet de diversification et une liquidité significatives lorsqu'ils sont intégrés à un portefeuille comprenant des actifs traditionnels comme les actions et les obligations.

D'un autre côté, le contexte spécifique de l'assurance-vie est caractérisé en général par des contrats à long terme à l'exemple des produits d'épargne ou de retraite, et une dépendance aux performances du marché financier. En effet les assureurs (sous réserve des rachats de contrat), disposent des cotisations des assurés sur une longue période. Cela les incite à rechercher des options d'investissement plus rentables pour rester compétitifs sur les taux servis aux assurés via la revalorisation des contrats. Dans cette optique, les crypto-actifs de part leur potentiel de gain et de diversification sur le long terme, apparaissent comme une alternative d'investissement particulièrement intéressante pour ce secteur.

Cependant, depuis l'entrée en vigueur de la directive Solvabilité II, des contraintes ont été imposées sur les types d'actifs dans lesquels les assureurs peuvent investir. L'article R332-2 (2018) du code des assurances stipule que les actifs autorisés doivent satisfaire à des critères de sécurité, de liquidité et de rentabilité, tout en respectant des limitations réglementaires pour éviter la concentration des risques. Toutefois, les récentes évolutions réglementaires, telles que l'adoption du règlement MiCA (voir AMF (2023)) qui vise à encadrer les crypto-actifs et leurs prestataires pour renforcer la protection des investisseurs et la stabilité financière, ainsi que la loi PACTE (2019), qui permet aux assureurs d'investir dans les crypto-actifs via les unités de compte de contrats d'assurance-vie, ouvrent de nouvelles perspectives. De plus, l'approbation des ETFs bitcoin et Ethereum aux

États-Unis, qui a attiré des investisseurs institutionnels comme BlackRock, pourrait préfigurer une révision du cadre réglementaire européen permettant aux assureurs vie d’investir directement dans les cryptomonnaies.

Dans ce contexte, l’étude des ETFs bitcoin aux États-Unis et en Europe dans Leboucher (2024) offre un aperçu pertinent des dynamiques actuelles. Le marché des ETFs bitcoin américains a rapidement atteint 60 milliards de dollars en seulement cinq mois suite à leur approbation par la SEC, reflétant un intérêt croissant pour ces produits. Cependant, en Europe, bien que les premiers produits bitcoin soient apparus dès 2019 sous forme d’ETC (exchange-traded commodities), leur adoption a été freinée par la complexité des structures et la réticence des investisseurs institutionnels. Les distributeurs européens restent hésitants, pris entre l’intérêt pour les avantages des crypto-actifs et les préoccupations liées à l’image de marque. En conséquence, les produits liés au bitcoin en Europe peinent à s’intégrer dans les canaux d’épargne à long terme, contrairement aux États-Unis où les ETF bitcoin attirent des flux significatifs provenant de l’épargne retraite.

Cet article traite différentes méthodologies pour calibrer un choc S2 bitcoin sur un principe analogue à la méthodologie de calibration du choc action. Il reprend en grande partie les résultats obtenus dans le mémoire d’actuaire d’Ibrahima (2024). Dans ce dernier, il explore entre autres l’intégration potentielle du bitcoin dans les portefeuilles d’assurance-vie, en anticipant une évolution favorable de la réglementation prudentielle européenne. Il utilise un modèle ALM afin d’inclure le bitcoin pour évaluer l’impact de cette intégration dans un environnement S2. Il détermine également une série de valeurs potentielles de chocs pour le bitcoin selon les approches explorées, avec une sélection finale fixant le niveau de choc pour le bitcoin à 84%.

Dans la suite de cet article, nous définirons d’abord le cadre de l’étude en discutant la méthodologie de choix entre les rendements relatifs et les log-rendements. Nous examinerons ensuite l’approche de l’EIOPA pour le calibrage d’un choc action, avant de présenter les approches paramétriques et stochastiques appliquées aux données et hypothèses retenues, et enfin, nous synthétiserons les travaux de calibrage effectués et présenterons les conclusions tirées de cette étude.

1 Cadre de l’étude

Le bitcoin est un actif financier relativement récent, avec des données historiques remontant seulement à 2010. La faible profondeur de l’historique annuel pose des défis considérables pour un calibrage statistique rigoureux du choc S2. Pour surmonter cette limitation, plusieurs stratégies ont été mises en œuvre, combinant des approches paramétriques et stochastiques afin de fournir une base comparative de méthodes et de valeurs de choc, permettant de sélectionner une valeur pertinente pour le choc bitcoin dans le cadre de Solvabilité II.

1.1 Rendement relatif ou log-rendement ?

Pour calibrer un choc financier associé au bitcoin, il est crucial de bien définir le rendement approprié. Traditionnellement, les modèles financiers sont calibrés sur les log-rendements en raison de propriétés qui les rendent simples à manipuler dans certains cadres de modélisation. Cependant, pour des actifs très volatils comme le bitcoin, les log-rendements peuvent ne pas représenter fidèlement le comportement réel de l’actif. En effet, ces derniers approximent correctement les rendements relatifs que lorsqu’ils varient peu autour de zéro. Cette approximation est mathématiquement prouvée par le développement limité de la fonction $\log(x)$ à l’ordre 1 au voisinage de 1.

Soit S_t est le prix de l’actif à l’instant t . Le rendement est défini par $r_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$ et le log-rendement est défini par $\tilde{r}_t = \log(\frac{S_t}{S_{t-1}})$. En posant $x_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$, et en supposant que x_t est proche de 1 alors $r_t = x_t - 1$ est proche de 0. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \tilde{r}_t &= \log(x_t) = \log(1 + (x_t - 1)) \\ &= (x_t - 1) + 0(x_t - 1) \\ &\simeq (x_t - 1) = r_t \end{aligned} \tag{1}$$

On remarque alors que l'approximation du rendement par le log-rendement est abusive pour des rendements ayant une forte volatilité comme le bitcoin.

La Figure 1.1 illustre l'atténuation de certains pics de variation par les log-rendements (en vert), ce qui peut entraîner une sous-estimation des variations réelles du bitcoin.

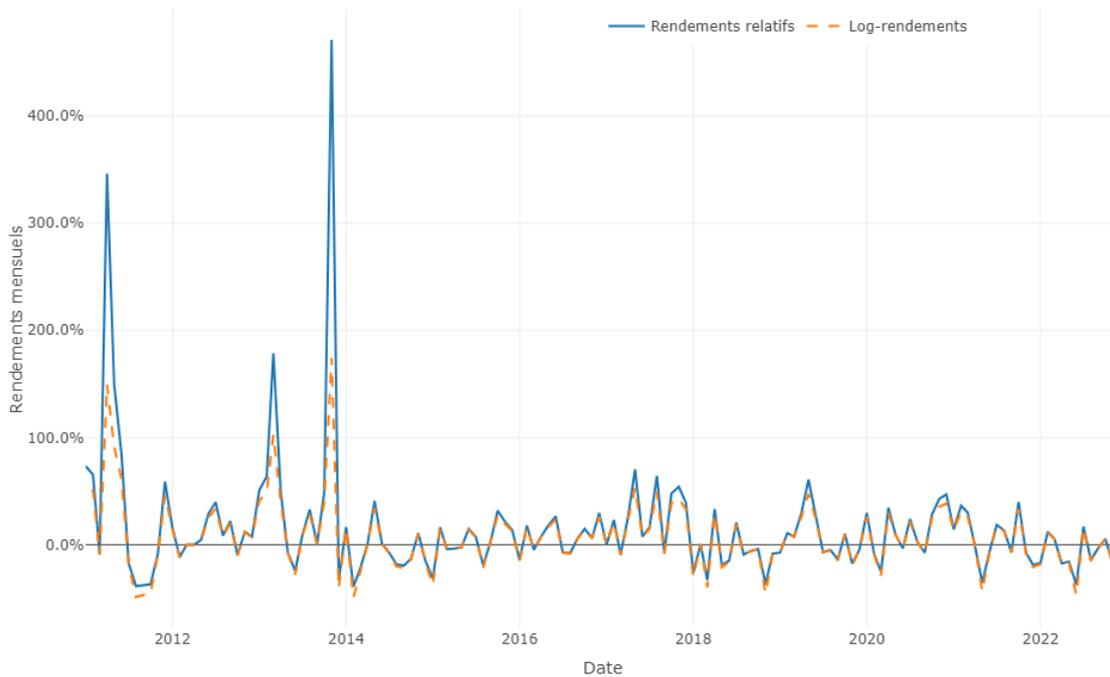


Figure 1.1 Évolution des rendements relatifs et des log-rendements

Cette sous-estimation est d'autant plus amplifiée lorsque la durée sur laquelle le rendement est calculé augmente, par exemple en passant d'un rendement journalier à un rendement mensuel. Ainsi, les rendements relatifs seront privilégiés autant que possible comme données de référence à modéliser pour calibrer le choc S2.

Néanmoins, pour l'approche stochastique qui nécessite une modélisation financière préliminaire, le log-rendement a été adopté pour projeter le prix du bitcoin. Ensuite, une fois les prix projetés, le calibrage du choc est réalisé à partir des rendements relatifs.

Cette méthodologie hybride permet de tirer parti des avantages de chaque approche : la précision des modèles paramétriques pour représenter les variations du bitcoin, et la flexibilité de l'approche stochastique pour la projection des prix. Le retour aux rendements relatifs pour le calibrage final assure une cohérence avec la pratique notamment sous S2.

1.2 Critères de sélection de modèles

Plusieurs modèles basés sur différentes familles de lois ont été considérés pour établir une base comparative de valeurs de chocs. Pour sélectionner les lois, deux critères ont été retenus :

- **AIC** : Le critère d'information d'Akaike (AIC) est le premier outil d'évaluation. L'AIC prend en compte les biais liés au nombre de paramètres du modèle, cherchant un équilibre optimal entre la précision et la complexité. Sa formule est :

$$AIC = 2k - 2 \ln(L),$$

où k est le nombre de paramètres du modèle à estimer et L le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle.

Toutefois, l'utilisation de ce critère est délicate et doit être appliquée avec précaution. Nous l'utiliserons uniquement pour comparer les modèles ajustés sur un même jeu de données. Concrètement, la comparaison des AIC des modèles paramétriques ajustés sur l'historique

des rendements annuels fixes doit être effectuée indépendamment de celle des AIC des modèles ajustés sur l'historique des rendements glissants.

- Le second critère est la comparaison quantile empirique - quantile théorique. Bien que l'AIC évalue la qualité d'ajustement globale du modèle, il peut parfois négliger la précision sur les queues de distribution. Or, ces queues, correspondant aux petits niveaux de quantiles, sont cruciales pour cette étude dans la mesure où elles portent l'information sur le niveau du choc S2.

Cette approche à deux critères permet une évaluation plus complète et nuancée des différents modèles, en tenant compte à la fois de leur performance globale et de leur précision dans la modélisation des événements extrêmes.

1.3 Méthodologie de l'EIOPA pour le calibrage du choc action

L'approche paramétrique explorée dans cet article s'inspire de la méthodologie de calibrage adoptée par l'EIOPA pour le choc action. Comme mentionné dans l'article *Calibration Paper Solvency I*, CEIOPS (2010), cette méthodologie repose sur l'ajustement d'une loi statistique aux log-rendements annuels de l'indice considéré afin d'estimer un quantile paramétrique à 0,5%. Par exemple, pour le marché des actions :

1. L'EIOPA adopte une approche simplifiée en supposant que les rendements de l'indice MSCI World suivent une distribution normale à long terme. Pour estimer un quantile paramétrique, les deux paramètres de cette distribution (la moyenne et la variance) sont obtenus par maximisation de la log-vraisemblance.
2. Le quantile paramétrique à 0,5 % d'une loi normale est ensuite calculé en utilisant la moyenne et la variance estimée précédemment. Ce dernier correspond au rendement annuel qui pourrait être observé sur 200ans, dans ce cadre de modélisation.
3. Le choc action est obtenu en retraitant la valeur de ce quantile selon la formule suivante :

$$\text{Choc}_{S2} = \min(|\text{quantile}_{0.5\%}|, 1) \times 100\%$$

Ce retraitement du quantile calibré permet d'obtenir une valeur de choc S2 comprise entre 0 % et 100 %, ce qui est cohérent avec le fait que la valeur de marché de l'actif ne peut pas être négative. Avec cette méthode, la valeur du choc retenue par l'EIOPA pour les actions de type I est de 39 %.

Cette méthodologie a fait l'objet de plusieurs critiques. Alexandre (2021) souligne, par exemple, le mauvais ajustement de la loi normale aux rendements de la plupart des actions détenues par les assureurs. De plus, Matthias S. (2021) met en évidence la non-représentativité de l'échelle temporelle utilisée pour le calibrage du choc action, cet historique étant arrêté à 2008.

1.4 Approche paramétrique du calibrage du choc bitcoin.

En réponse aux critiques formulées à l'encontre de la méthodologie de l'EIOPA et en s'appuyant sur la littérature abondante concernant la modélisation d'actifs financiers et les techniques d'échantillonnage pour compenser la faible profondeur de l'historique bitcoin, diverses approches regroupées sous le terme "approche paramétrique" ont été considérées pour le calibrage du choc bitcoin.

L'approche paramétrique se décline en plusieurs variantes, selon le type de modèle utilisé et le jeu de données considéré. Étant donné la forme particulière des queues de distribution des rendements du bitcoin, il a été jugé pertinent de tester plusieurs modèles statistiques afin d'identifier celui qui représente le mieux les rendements observés. Pour évaluer la sensibilité des résultats, deux jeux de données distincts (annuels et annuels glissants) ont été utilisés comme historique pour ajuster les modèles.

1.4.1 Calibrage sur 12 années d'historique

Nous avons d'abord tenté de calibrer un choc basé uniquement sur l'historique des rendements annuels disponibles sur 12 années complètes, soit 12 observations de rendements annuels. Cependant,

ce nombre d'observations est inférieur aux 30 observations annuelles généralement recommandées pour un ajustement statistique robuste. En raison de cette limitation, une autre approche d'échantillonnage de données a été considérée pour le calibrage des modèles paramétriques.

1.4.2 Calibrage sur l'historique journalier des rendements annuels glissants

Pour augmenter la taille de l'échantillon, nous avons utilisé la méthode des rendements annuels glissants. Cette méthode calcule les rendements annuels sur des périodes de 12 mois qui se chevauchent, en utilisant des données journalières. Par exemple, en utilisant deux années de données journalières, nous avons généré 364 rendements annuels glissants. Ainsi, sur une période de 12 ans, nous avons pu obtenir 4015 rendements annuels glissants ($11 * 365$), ce qui est largement suffisant pour l'ajustement des modèles statistiques. Néanmoins, cette méthode présente certaines limites, notamment la difficulté à quantifier précisément la perte ou le gain d'information par rapport aux rendements calculés sur une année civile, et le risque de ne pas refléter correctement le potentiel de croissance ou de décroissance à long terme.

1.5 Approche stochastique du calibrage du choc

En complément des approches paramétriques, cette étude explore des modèles stochastiques pour mieux capturer la dynamique complexe des rendements du bitcoin. Parmi ces modèles, le modèle de série temporelle à chaîne de Markov cachée (MS-AR) se distingue par sa capacité à représenter les fluctuations imprévisibles et les changements de régime de volatilité observés dans la dynamique d'un actif volatil tel que le bitcoin.

Le modèle MS-AR, introduit pour la première fois par Hamilton (1989) pour détecter les régimes de volatilité sur les marchés boursiers, présente la particularité de représenter les différents régimes de volatilité dans les séries temporelles non stationnaires. Contrairement aux modèles GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) qui nécessitent une condition de stationnarité, le modèle MS-AR offre une flexibilité accrue pour modéliser les séries non stationnaires. Par ailleurs, le modèle peut être directement estimé sur les prix et rendements journaliers du bitcoin, les rendements annuels pouvant être facilement calculés une fois le modèle estimé.

Le modèle MS-AR est appliqué à l'historique journalier des log-prix et log-rendements (journaliers) du bitcoin afin d'évaluer son potentiel à modéliser à la fois les séries stationnaires et non stationnaires. Les données journalières sont utilisées pour entraîner et tester le modèle, permettant ainsi une évaluation rigoureuse de ses performances.

Une fois le modèle MS-AR entraîné et testé, des scénarios de prix monde réel pour le bitcoin sont générés. Ces scénarios permettent de construire une nouvelle base de données de rendement relatif ou d'enrichir la base de données existante. Cette nouvelle base de données est ensuite utilisée pour le calibrage d'un choc empirique, offrant ainsi des perspectives précieuses pour la gestion des risques et la prise de décision.

1.6 Analyse statistique des données

Pour assurer la pertinence de nos modèles, nous avons utilisé des données empiriques provenant du site investing.com couvrant la période du 1er janvier 2011 au 31 décembre 2022, soit 12 années d'historique d'observations.

Ces données incluent des observations journalières permettant une analyse détaillée des rendements du bitcoin à différentes échelles de temps et comprennent les variables suivantes : dates de cotation, prix de fermeture et rendements relatifs.

1.6.1 Historique d'observations journalières

La densité de la distribution des rendements journaliers sur les 12 années d'historique d'observations montre une concentration autour de zéro et une queue épaisse à droite, signalant des fluctuations importantes et imprévues. Le tableau 1.1 résume les grandeurs statistiques du jeu de données.

Statistique	prix	rendement (%)
Min.	0.3	-57
1st Qu.	228.9	-1
Median	944.2	0
Mean	8929.0	0.4
3rd Qu.	9673.6	2
Max.	67527.9	336

Table 1.1 Résumé des prix et rendement journaliers du bitcoin

L'évolution du cours du bitcoin jusqu'au 31 décembre 2022 montre une grande variabilité. Le prix minimal enregistré est de 0,3 €, tandis que le prix maximal atteint est de 67 527,9 €. En termes de rendement, le rendement minimal est de -57%, et le rendement maximal est de 336%. Ces statistiques illustrent non seulement la volatilité extrême du bitcoin, mais aussi son potentiel de rendement élevé.

1.6.2 Historique d'observations annuelles

Les rendements annuels ont été calculés à partir des données journalières pour obtenir 12 observations. La distribution des rendements annuels présente une concentration autour de zéro et une queue épaisse à droite, similaire aux distributions journalières. Les rendements annuels varient de -73% à 5870%, reflétant une forte volatilité avec des mouvements de prix significatifs comme observé en Figure 1.2.

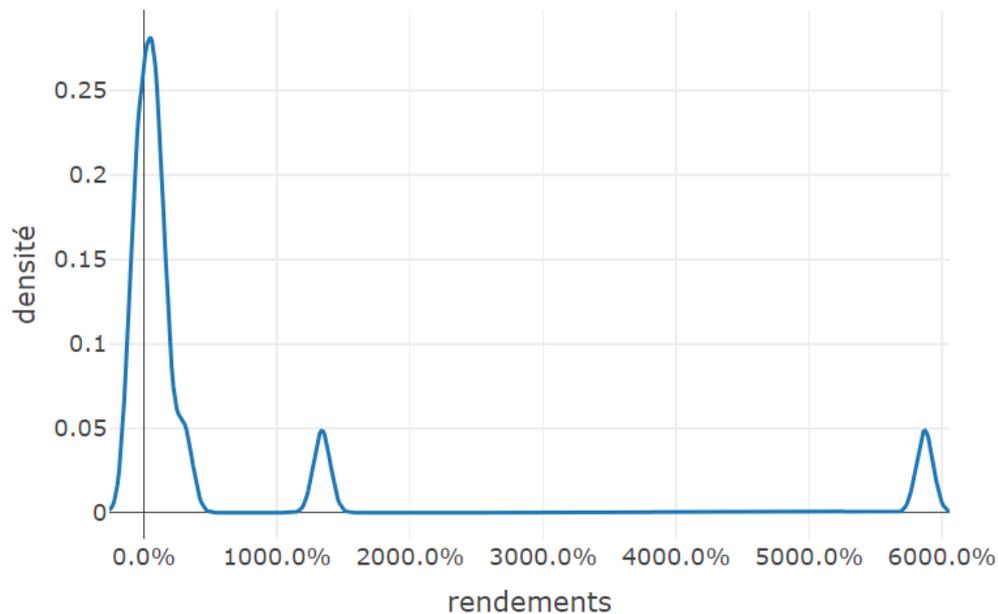


Figure 1.2 Densité empirique des 12 rendements annuels

Les observations annuelles des prix du bitcoin montrent que cet actif présente une forte rentabilité accompagnée d'une volatilité significative. Cependant, la longue traîne à droite de la densité empirique — représentant les rendements élevés — semble indiquer que le potentiel de gain dépasse le risque de perte.

2 Approches paramétriques du calibrage du choc

Dans cette section, nous présentons les différentes approches paramétriques utilisées pour le calibrage du choc bitcoin. Pour rappel, ces approches consistent à ajuster diverses lois paramétriques sur différents jeux de rendements. Ces méthodes tiennent compte des critiques formulées à l'encontre de la méthodologie de l'EIOPA pour le calibrage du choc action, comme évoqué dans la Section 1.3, ainsi que de la faible profondeur de l'historique des observations annuelles. Chaque combinaison (modèle ; jeu de données) a généré une valeur de choc, contribuant ainsi à notre base comparative de résultats.

2.1 Choix des lois paramétriques

Pour sélectionner les distributions les plus adaptées à la modélisation des rendements du bitcoin, nous avons analysé les formes des densités empiriques des distributions de rendements journaliers et annuels. Comme l'illustre la Figure 1.2, les densités analysées présentent des queues épaisses à droite.

La densité révèle une asymétrie avec une queue épaisse à droite, suggérant l'utilisation des lois de distributions à queue épaisse pour modéliser ces rendements. Nous avons par ailleurs calculé les mesures statistiques de l'asymétrie (skewness) et de l'aplatissement (kurtosis) ainsi que certaines grandeurs statistiques pour les rendements annuels et annuels glissants. Ces indicateurs sont présentés dans le tableau 2.2 ci-après.

Rendement	Min.	1er Qu.	Médiane	Moy.	Max.	Écart-type	Asymétrie	Aplatissement
Annuels	-0.73	0.00	0.94	7.14	58.70	16.31	3.06	12.88
Annuels glissants	-0.83	-0.05	1.28	4.17	96.3	9.89	4.87	31.47

Table 2.2 Statistiques de l'historique des rendements annuels et annuels glissants

Les échantillons analysés présentent des valeurs élevées d'asymétrie et d'aplatissement. Cette caractéristique justifie le choix des distributions de Student, GEV (Generalized Extremum Values), et GPD (Generalized Pareto Distribution). Ces modèles sont amplement documentés dans Dey and Yan (2016).

Nous avons également considéré des lois hyperboliques généralisées (GHD) pour la modélisation des actifs à queue lourde. Ces lois leptokurtiques sont particulièrement adaptées pour représenter des observations caractérisées par un pic prononcé autour de leur moyenne et une longue traîne. L'ouvrage de Leblanc (2003) souligne l'importance de ces lois et leur application en finance, notamment les lois Hyperbolique et Normale Inverse Gaussienne (NIG).

Dans un souci de comparaison avec la méthodologie S2 du calibrage du choc action, la loi normale a également été intégrée à l'analyse. Ci-dessous la liste des lois paramétriques retenues :

- loi normale
- loi Student
- loi GEV
- loi GPD
- loi hyperbolique généralisée (GHD)

2.2 Calibrage du choc sur les historiques de rendements annuels

Cette section se concentre sur l'ajustement des lois paramétriques retenues sur les rendements annuels fixes et glissants du bitcoin. L'analyse des statistiques présentées dans la Table 2.2 révèle des caractéristiques remarquables : les rendements annuels fixes affichent une moyenne de 714%, tandis que les rendements annuels glissants présentent une moyenne de 417%. Ces moyennes de rendements très élevées s'accompagnent cependant de volatilités également très importantes : 16% pour les rendements annuels fixes et 9% pour les rendements annuels glissants. Il est notable

que les rendements glissants présentent des valeurs moyennes et de volatilité inférieures à celles des rendements annuels fixes. Cette différence s'explique par la profondeur de l'historique des rendements glissants, qui tend à lisser la volatilité et à révéler une moyenne à long terme plus modérée.

Le quantile empirique à 0,5% représentant la valeur du choc calculé à partir de la valeur empirique est de 73% (voir Table 2.2). Cette valeur nous donne une indication de l'ampleur du choc à calibrer par les modèles paramétriques. La même approche de quantile empirique appliquée aux rendements annuels glissants a produit un choc de 78%.

Le tableau ci-après 2.3 résume les résultats des travaux de calibrage du choc paramétrique obtenus pour chaque couple (modèle ; historique retenu).

Modèle	Jeu de données annuel	Quantile 0.5%	Observations
Empirique	Rend. sur 12 ans	73%	Référence empirique
	Rend. glissants	78%	Valeur cohérente avec l'approche historique
Normale	Rend. sur 12 ans	3323.1%	Mauvais ajustement, non-normalité confirmée
	Rend. glissants	2129.1%	Mauvais ajustement, non-normalité confirmée
Student	Rend. sur 12 ans	505.1%	Meilleur que normale, mais quantile élevé
	Rend. glissants	85.33%	Meilleur que normale, mais quantile élevé
GEV (Fréchet)	Rend. sur 12 ans	76.95%	Meilleur ajustement, queues lourdes bien captées
	Rend. glissants	84.0%	Meilleur ajustement, queues lourdes bien captées
Hyperbolique	Rend. sur 12 ans	69.72%	Sous-estimation des queues extrêmes négatifs
	Rend. glissants	79.6%	Sous-estimation des queues extrêmes négatifs
NIG	Rend. sur 12 ans	86.72%	Bonne adéquation, second meilleur modèle
	Rend. glissants	93.2%	Bonne adéquation, second meilleur modèle
Pareto II	Rend. glissants	81.9%	Bonne adéquation

Table 2.3 Comparaison des modèles de calibrage par type de rendement

Le critère retenu pour évaluer la qualité d'ajustement des modèles testés est l'AIC comme expliqué en Section 1.2. Les observations du tableau pour chaque couple (modèle paramétrique ; jeu de données) sont détaillés dans l'Annexe A.

2.3 Synthèse de l'approche paramétrique

En Table 2.3, nous avons comparé les chocs empiriques et paramétriques pour différents niveaux de quantile afin de mieux apprécier la performance des modèles pour capturer les queues extrêmes de la distribution des rendements. Une attention particulière a été portée à la queue gauche, correspondant à la zone de modélisation du choc.

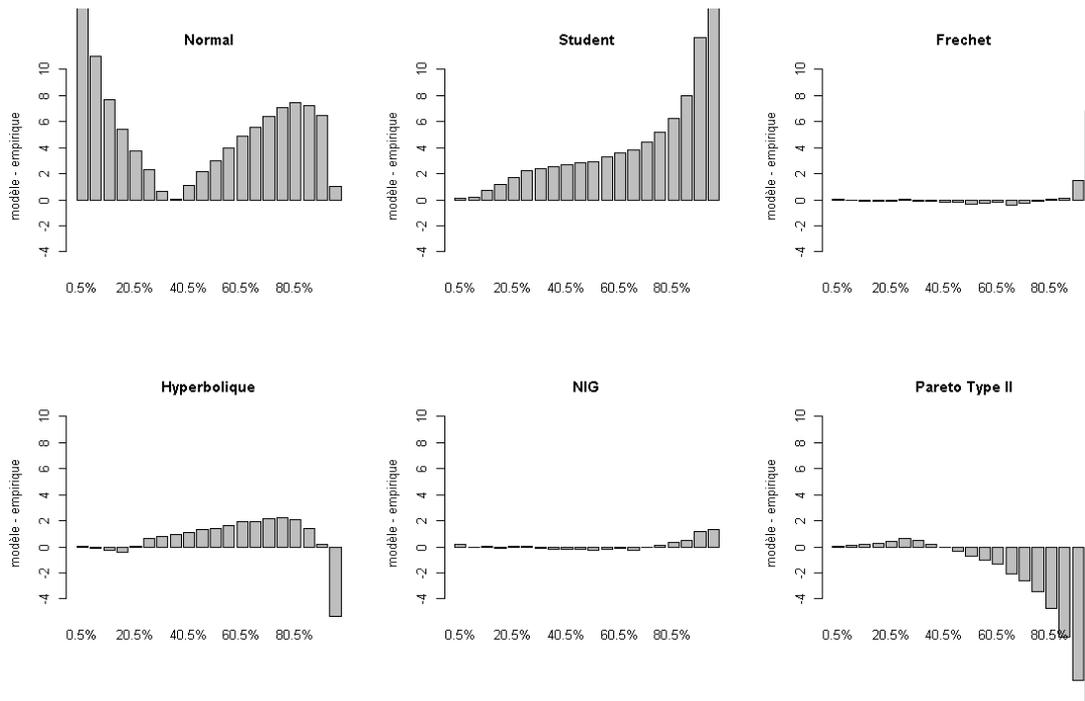


Figure 2.3 Différence entre les quantiles des modèles calibrés vs quantiles empiriques

En comparant les chocs paramétriques avec les chocs empiriques obtenus à partir des rendements annuels, nous avons observé que les modèles NIG et Fréchet produisent des chocs plus proches des valeurs empiriques. Le modèle de Fréchet, en particulier, a généré des quantiles plus proches des quantiles empiriques pour les faibles quantiles (queue gauche). Par conséquent, nous avons retenu les valeurs de choc de ce modèle sur nos deux jeux de données comme bornes d'intervalle de choc éligible, à savoir [77%, 84%]. La valeur de choc calibrée par le modèle de Pareto type II est incluse dans cet intervalle.

3 Approche stochastique du calibrage du choc

De manière alternative, cette étude propose une approche stochastique innovante pour le calibrage du choc bitcoin, visant à surmonter les limitations liées à la brièveté de l'historique des données bitcoin et à corroborer les résultats obtenus par l'approche paramétrique vue précédemment.

La méthodologie développée repose sur l'élaboration d'un générateur de scénarios économiques en monde réel, dont les données simulées servent à calibrer le choc bitcoin. Cette approche nécessite l'exploration de modèles mathématiques avancés, capables de capturer et de refléter les principales caractéristiques de la dynamique du bitcoin.

3.1 La famille de modèles MSAR

L'analyse de la dynamique du cours du bitcoin a révélé l'existence de multiples régimes de volatilité, orientant naturellement le choix vers le modèle MSAR (Markov Switching Autoregression Models). Bien que cette méthode implique la calibration d'un modèle de diffusion stochastique, elle offre une représentation plus précise de la dynamique des prix que les distributions conventionnelles, en capturant efficacement les différents régimes de volatilité.

Ce modèle, initialement introduit par Hamilton (1989), permet la modélisation des séries temporelles stationnaires et non stationnaires. Les fondements mathématiques sous-jacents à la construction du modèle sont présentés dans l'Annexe A. Pour une compréhension plus approfondie, le lecteur est invité à consulter les travaux de Adejumo A. O. (2021).

Le modèle MS-AR intègre deux composantes principales pour représenter la dynamique d'une série temporelle : une composante auto-régressive (AR) et une composante à changement de régime markovien (MS). Ce modèle ajuste les paramètres de la composante auto-régressive en fonction de l'état du régime, permettant ainsi de capturer les fluctuations des rendements sous différents états du marché. Les transitions entre régimes sont modélisées par une chaîne de Markov. La matrice de transition encode les probabilités de passage d'un régime à l'autre, facilitant l'estimation de la durée attendue de chaque régime.

En somme, le modèle MS-AR représente les rendements à un instant t comme une combinaison linéaire des rendements antérieurs, modulée par des coefficients autorégressifs dépendants du régime actuel et d'une erreur gaussienne, offrant ainsi une modélisation précise des phases d'accumulation, de distribution, d'excès et de panique caractéristiques des prix du bitcoin.

Le modèle a été calibré sur l'historique quotidien du log-prix (données non stationnaires) et des log-rendements du bitcoin (données stationnaires). Cette approche vise à exploiter pleinement les capacités du modèle, qui est conçu pour traiter tant les données stationnaires que non stationnaires.

3.2 Calibrage du choc bitcoin à partir du modèle MSAR obtenu

3.2.1 Calibrage à partir des log-prix simulés

Ayant démontré sa capacité à simuler des trajectoires du prix bitcoin, nous avons calibré un modèle MS(3)-AR(3) sur l'ensemble de l'échantillon, soit 4383 observations correspondant à 12 années d'observations journalières. Pour calculer le quantile à 0.5% représentant notre choc, nous avons adopté deux approches de projection :

Première approche

La première étape consiste à générer dans le modèle retenu, 10 000 trajectoires du cours journalier logarithmique du bitcoin sur une période de 365 jours. Pour chaque trajectoire de log-prix, nous revenons au prix initial non transformé avant de calculer un rendement relatif annuel en utilisant la formule suivante au temps t pour la trajectoire d'indice j :

$$r_t^{(j)} = \frac{P_t^{(j)}}{P_0^{(j)}} - 1 = \exp\left(X_t^{(j)} - X_0^{(j)}\right) - 1 \text{ et } X_0^{(j)} = \log(P_0^{(j)}), \quad (2)$$

où $X_t^{(j)}$ est la série des log-prix et $t = 365$ jours.

Le vecteur de 10 000 rendements annuels nous a permis de calculer une densité empirique et d'estimer les quantiles empiriques.

Le quantile empirique à 0.5% calculé sur cette distribution de rendements annuels bitcoin nous donne un choc de 89.98%.

Seconde approche

Le calcul du choc précédent se base uniquement sur les trajectoires simulées. La deuxième approche présentée ci-après offre l'avantage d'utiliser de manière combinée les observations réelles et simulées. De plus, elle permet d'obtenir une distribution de choc, ce qui est particulièrement utile pour analyser la plage de variation du choc avec l'approche stochastique.

Cette approche, plus exigeante en temps de calcul, comporte les étapes ci-dessous :

- Génération de 10 000 trajectoires du log-prix journalier du bitcoin sur 18 ans (6570 jours).
- Ajout des 12 années d'historique du bitcoin à chaque trajectoire simulée, constituant ainsi un historique de 30 ans.
- Calcul des rendements annuels (30 rendements) pour chaque nouvelle trajectoire sur 30 ans, avec la formule (2).
- Calibrage d'un choc pour chaque échantillon de 30 rendements annuels, aboutissant à une distribution de 10 000 valeurs de choc.
- Analyse de la répartition de ces quantiles (médiane, quartiles, etc.) à partir de la distribution obtenue.

La Figure 3.4 présente la densité empirique des quantiles 0,5% obtenus à partir des 10 000 trajectoires sur 30ans.

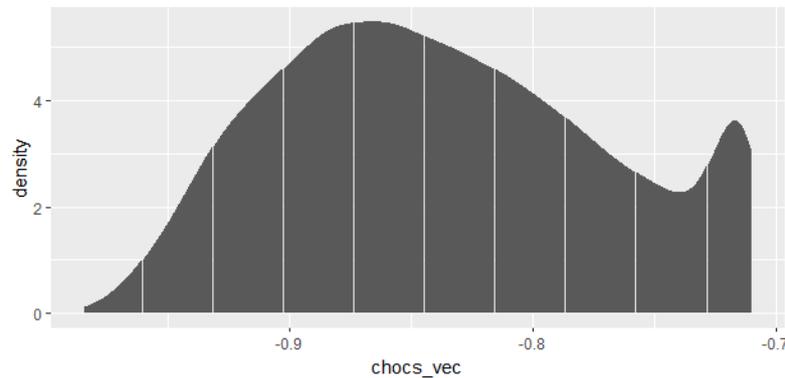


Figure 3.4 Densité empirique associée aux 10 000 quantiles à 0.5% calculés

L'analyse des 10 000 scénarios révèle un choc moyen de 83.62%. Le choc médian de 84.24% est très proche du choc moyen, avec un écart interquartile de 10%. Pour cette deuxième approche, nous retenons le choc médian de 84.24%.

3.2.2 Calibrage du choc avec les log-rendements simulés

Suite à la validation des hyper-paramètres modèle MS(3)-AR(5), nous ajustons le modèle sur la totalité de l'échantillon (4383 observations).

Avec ce modèle, nous simulons 10 000 trajectoires de 365 log-rendements journaliers. Avec cette matrice de projection, nous calculons les rendements relatifs annuels avec la formule suivante :

$$\exp \left(\sum_{i=1}^{365} \hat{r}_i \right) - 1,$$

où \hat{r}_i désigne le log-rendement entre le jour $i + 1$ et le jour i . Nous obtenons alors un échantillon de 10 000 rendements annuels simulés. Le quantile à 0.5% de cette distribution donne un choc à 89.64%.

3.3 Synthèse des deux approches

Les chocs obtenus par simulation du modèle des log-prix dans le modèle MSAR de l'approche 1 et la distribution des log-rendements présentent des similarités marquées (89,98% contre 89,64%). Cette convergence des méthodes est notable. Cependant, il est préférable d'accorder davantage de crédibilité au modèle ajusté sur la série temporelle non stationnaire des log-prix, car il offre un meilleur ajustement selon le critère du RMSE.

L'élargissement de l'échantillon simulé du log-prix avec l'historique des 12 dernières années observées - approche 2 - afin de disposer de 10 000 échantillons sur 30 années d'observations nous a permis d'obtenir une distribution des quantiles à 0,5%. Cette distribution révèle une plage d'observation du choc entre 71,03% et 98,41%. Il est important de souligner que tous les chocs obtenus avec les "meilleurs modèles" des différentes approches paramétriques de calibrage du choc mentionnées dans ce document se situent dans cet intervalle de valeurs. De plus, l'écart de 10 points de pourcentage entre les quartiles suggère une dispersion modérée des valeurs autour de la médiane, ce qui peut indiquer une certaine stabilité ou cohérence dans les données de choc.

Ces analyses nous conduisent à retenir la valeur du choc bitcoin à 84% pour l'approche stochastique. Pour rappel, l'intervalle de choc éligible pour l'approche paramétrique est [77%, 84%]. Ainsi, la valeur retenue de 84% est cohérente avec les résultats obtenus par les deux approches paramétriques et stochastiques.

Conclusion

Notre étude, centrée sur le bitcoin comme actif représentatif des crypto-monnaies, met en lumière la complexité du calibrage d'un choc approprié, en raison de sa forte volatilité et de la faible profondeur d'historique due à la nouveauté de cet actif financier.

En examinant à la fois des approches paramétriques et stochastiques, nous avons comparé diverses méthodes de modélisation pour déterminer celle offrant la meilleure pertinence pour un choc Solvabilité II. Les modèles statistiques testés incluant la loi normale, la loi de Student, la loi GEV, les lois GHD et la loi GPD ont produit des estimations variées des valeurs de choc, soulignant l'importance du choix du modèle sur la valeur du choc calibré et la nécessité d'une sélection rigoureuse en fonction des observations historiques. Par ailleurs, l'approche stochastique, via un modèle autorégressif à changement de régime markovien (MSAR), a permis de capturer la non-stationnarité de la dynamique des prix et les comportements extrêmes du marché, en générant une gamme étendue de scénarios futurs. Le modèle MSAR retenu comporte 3 régimes de marché. Cette méthode, en complément des analyses paramétriques, offre une estimation robuste des valeurs de choc en conditions extrêmes et permet de s'affranchir de la limitation de l'historique du bitcoin disponible.

Les méthodes développées dans cette étude fournissent une base d'évaluation des risques associés au bitcoin dans le cadre des exigences du pilier I de Solvabilité II. La valeur de choc retenue de 84% est largement supérieure à celles calibrées par l'EIOPA pour les chocs actions de type I (39%) et de type II (49%). L'analyse de l'impact de ce choc sur le capital de solvabilité requis (SCR) d'un assureur vie, menée dans le mémoire d'Ibrahima (2024), illustre les conséquences significatives d'une telle valeur. Pour une allocation égale de 5% bitcoin et 5% d'actions de type I, le SCR stand-alone du bitcoin est environ quatre fois plus élevés que celui des actions, représentant un coût de capital considérable pour l'assureur. Bien que l'effet de diversification apporté par le bitcoin atténue cet impact lors de l'agrégation des sous-facteurs de risque de marché, ces résultats aident à comprendre en partie la réticence des assureurs vie européens à adopter les cryptoactifs, en raison de la sensibilité de la gestion des risques des cryptoactifs à la réglementation en vigueur. Le quantile à 0,5% défini par l'EIOPA semble excessivement prudent pour le bitcoin. Une approche alternative pourrait imposer une proportion maximale de bitcoin dans le portefeuille avec un niveau de choc plus faible.

Ces résultats soulignent l'importance pour le secteur de l'assurance, notamment l'assurance vie, d'approfondir les études sur les cryptoactifs. Il est crucial de développer des stratégies d'investissement adaptées à cette classe d'actifs et de fournir des preuves convaincantes au régulateur. Cela pourrait favoriser une évolution rapide des normes prudentielles en Europe en faveur des cryptoactifs, permettant ainsi de combler le retard par rapport aux États-Unis.

Références

- Abhay K. S., David E. A., R. J. P. (2011). Value at risk estimation using extreme value theory. *Edith Cowan University, Perth, Western Australia*.
- Adejumo A. O., Albert S., A. O. J. (2021). Markov Regime-Switching Autoregressive Model of Stock Market Returns in Nigeria. *Central Bank of Nigeria Journal of Applied Statistics* (Vol. 11 No. 2), 65–83.
- Alexandre, C. (2021). Le calibrage des chocs prévus par Solvabilité II à l'épreuve de la crise de la Covid-19. *Institut des Actuaires*.
- AMF (2023). Marchés de crypto-actifs : le règlement MiCA adopté par le Parlement européen.
- Balkema, A. A. and L. de Haan (1974). Residual life time at great age. *Annals of Probability* 2(5), 792–804.
- Binance Research (2019). Exploring the diversification benefits with bitcoin. *Binance Research*.
- Caeiro, F. and M. I. Gomes (2016). Threshold selection in extreme value analysis. In *Extreme Value Modeling and Risk Analysis*, pp. 69–86.
- CEIOPS (2010). Calibration Paper Solvency II. *CEIOPS-SEC-40-10 384*.
- Dey, D. K. and J. Yan (Eds.) (2016). *Extreme Value Modeling and Risk Analysis : Methods and Applications*. New York : Chapman and Hall/CRC.
- Fateh, B., Y. Djabrane, and T. Sonia (2019). Loi de Pareto et Applications. *Mohamed Khider University - Biskra (MKUB)*.
- Hamilton, J. D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica* 57(2), 357–384.
- Ibrahima, D. (2024). Analyse de l'impact de l'ajout du bitcoin dans le portefeuille d'un assureur vie. *Institut des Actuaires*.
- Jon Danielsson, Laurens de Haan, L. M. E. C. G. d. V. (2016). Tail index estimation : Quantile driven threshold selection. *Social Science Research Network*.
- Leblanc, J.-P. (2003). *Distribution hyperbolique généralisée et applications financières*. Thèse (M.Sc.) Université de Sherbrooke.
- Leboucher, S. (2024). L'encours des ETF crypto se rapproche des 70 milliards de dollars en février. *L'AGEFI*.
- Matthias S., G. S. (2021). The standard formula of solvency II : a critical discussion. *European Actuarial Journal* 11(1), 3–20.
- PACTE, L. (2019). Loi n° 2019-486 du 22 mai 2019 relative à la croissance et la transformation des entreprises.
- R332-2 (2018). Article R332-2 - Code des assurances - Légifrance.
- Thompson, P., Y. Cai, D. Reeve, and J. Stander (2009, October). Automated threshold selection methods for extreme wave analysis. *Coastal Engineering* 56, 1013–1021.

A Approche paramétrique de calibrage du choc

A.1 Calibrage du choc par la loi normale

a) Sur les rendements annuels sur 12 ans

Cette section applique la méthodologie de l'EIOPA pour calibrer le choc du bitcoin en ajustant une loi normale à la distribution des rendements annuels observés. Les erreurs d'estimation des paramètres sont exprimées sous forme d'écart-type (std).

L'analyse révèle une sensibilité importante des paramètres estimés, avec des erreurs d'estimation élevées (4,34 et 3,07 pour μ et σ respectivement). L'ajustement de la loi normale à la distribution observée s'avère médiocre, ne reflétant pas le pic de la moyenne observée dans la densité empirique. Les quantiles s'écartent significativement de la droite attendue pour une distribution gaussienne, indiquant une modélisation inadéquate des queues de distribution.

Les tests de Shapiro-Wilk et Anderson-Darling confirment le rejet de l'hypothèse de normalité, ce qui est cohérent avec la forme empirique de la densité des rendements du bitcoin.

Le quantile paramétrique à 0,5% obtenu avec la loi normale calibrée est de 3323,1%, ce qui dépasse largement la plage de 0% à 100% prévue pour un choc selon Solvabilité 2. En se basant uniquement sur la loi normale, comme le stipule la norme S2 pour le choc action, le choc retenu pour le bitcoin serait de 100%. Cependant, cette valeur extrême pourrait résulter de l'inadéquation de la loi normale à l'échantillon, ainsi que de la faible profondeur de l'historique.

b) Sur les rendements annuels glissants

La même méthodologie a été appliquée aux rendements annuels glissants. Les résultats du calibrage des paramètres de la loi normale sont similaires à ceux obtenus pour les rendements annuels. Les paramètres de moyenne ($\mu = 4,17$) et de variance ($\sigma = 9,89$) restent très élevés. Toutefois, on constate une réduction des erreurs d'estimation (0,16 et 0,11 pour μ et σ), probablement due à un échantillon plus large.

Les tests de Shapiro-Wilk et d'Anderson-Darling rejettent à nouveau l'hypothèse de normalité. Le quantile à 0,5% calculé selon la loi normale calibrée atteint 2129,1%, cohérent avec les résultats précédents. Par conséquent, une valeur de choc de 100% serait également retenue avec la loi normale sur l'historique des rendements glissants.

Ces résultats soulignent les limites de l'utilisation de la loi normale pour modéliser les rendements du bitcoin et calibrer le choc associé dans le cadre de Solvabilité 2.

A.2 Calibrage du choc par la loi GEV

a) Sur les rendements annuels sur 12 ans

L'ajustement de la famille de loi GEV à la distribution des rendements du bitcoin sur 12 ans révèle une amélioration significative par rapport aux modèles précédents. Cette amélioration se manifeste par une réduction notable de l'AIC, indiquant une meilleure adéquation du modèle aux données. Le paramètre de forme positif confirme que la distribution suit une loi de Fréchet, caractérisée par des queues lourdes.

Le modèle GEV se distingue par une réduction des erreurs d'estimation des paramètres et une meilleure capture du pic de la moyenne ainsi que des queues de la distribution. L'alignement des quantiles théoriques et empiriques souligne la supériorité de ce modèle par rapport aux lois normale et de Student.

Le quantile à 0.5% calibré avec le modèle GEV indique un choc de 76.95%, une valeur plus proche du quantile empirique (72.68%).

b) Sur les rendements annuels glissants

L'ajustement du modèle GEV aux rendements glissants confirme la présence d'une loi de Fréchet, cohérente avec les résultats obtenus sur l'historique des rendements annuels.

L'AIC (19617.44) est inférieur à celui des lois normale et Student calibrées précédemment, confirmant la supériorité du modèle GEV. Les quantiles théoriques et empiriques présentent également un alignement majoritaire.

Le quantile à 0.5% calculé avec ce modèle donne un choc de 84,04%, une valeur proche de celle obtenue avec le modèle de Student.

A.3 Calibrage du choc par les lois hyperboliques généralisées (GHD)

Bien que moins courantes dans les domaines de l'actuariat et de la finance, les lois hyperboliques généralisées sont recommandées par Leblanc (2003) pour modéliser les rendements des actifs présentant des queues épaisses et un pic marqué autour de la moyenne, caractéristiques observées dans la densité empirique des rendements du bitcoin. Nous comparons donc la performance de cette famille de lois avec celle du modèle de Fréchet.

a) Sur les rendements annuels sur 12 ans

Deux sous-classes des lois hyperboliques généralisées ont été étudiées : la loi hyperbolique et la loi normale inverse gaussienne (NIG).

1. Calibrage du choc - Loi Hyperbolique

L'ajustement de la loi hyperbolique aux rendements du bitcoin montre une performance inférieure aux modèles de Fréchet et de Student selon le critère de l'AIC. Cependant, le quantile paramétrique à 0,5% donne un choc de 69,72%, proche du choc empirique de 72%.

2. Calibrage du choc - Loi Normale Inverse Gaussienne (NIG)

La loi NIG offre une meilleure adéquation que la loi hyperbolique et se classe deuxième après le modèle de Fréchet selon l'AIC. Toutefois, elle surestime légèrement le pic moyen et modélise moins bien la queue gauche de la distribution que la loi hyperbolique. Le quantile à 0.5% pour ce modèle est de 87%.

b) Sur les rendements annuels glissants

1. Calibrage du choc - Loi Hyperbolique

L'ajustement de la loi hyperbolique aux rendements glissants montre une performance inférieure au modèle de Fréchet selon le critère AIC (20972), mais supérieure aux lois normale et de Student. Le quantile de 0.5% calculé donne un choc de 79.62%.

2. Calibrage du choc - Loi Normale Inverse Gaussienne (NIG)

La loi NIG ajustée aux rendements annuels glissants présente un meilleur ajustement que le modèle hyperbolique selon le critère de l'AIC (19615). Le quantile de 0.5% calculé donne un choc de 93.16%.

En conclusion, bien que les performances des deux sous-classes de la loi hyperbolique généralisée n'aient pas surpassé celle de la loi GEV en termes de critère AIC et de comparaison quantile théorique-empirique, la sous-classe NIG a produit des performances très proches de la loi GEV.

A.4 Calibrage du choc utilisant la loi GPD

Nous n'avons pas appliqué le modèle GPD à l'historique de rendements annuels en raison de la faible profondeur des données. Cependant, nous pouvons l'utiliser avec l'échantillon des rendements glissants qui comporte beaucoup plus de points de données.

Dans cette section, nous nous concentrons sur le calibrage d'un choc bitcoin en mettant en évidence les petites valeurs de notre échantillon de rendements annuels glissants, c'est-à-dire la queue extrême gauche de la distribution. L'objectif est d'ajuster une loi de Pareto Généralisée (GPD) centrée sur ces valeurs extrêmes. Pour ce faire, nous appliquons une transformation affine $y = -x + b$,

où x représente notre échantillon de rendements et b la valeur maximale de cet échantillon, afin de transformer la distribution pour qu'elle ait un support positif. Ci-dessous la densité de la nouvelle base de données transformée :

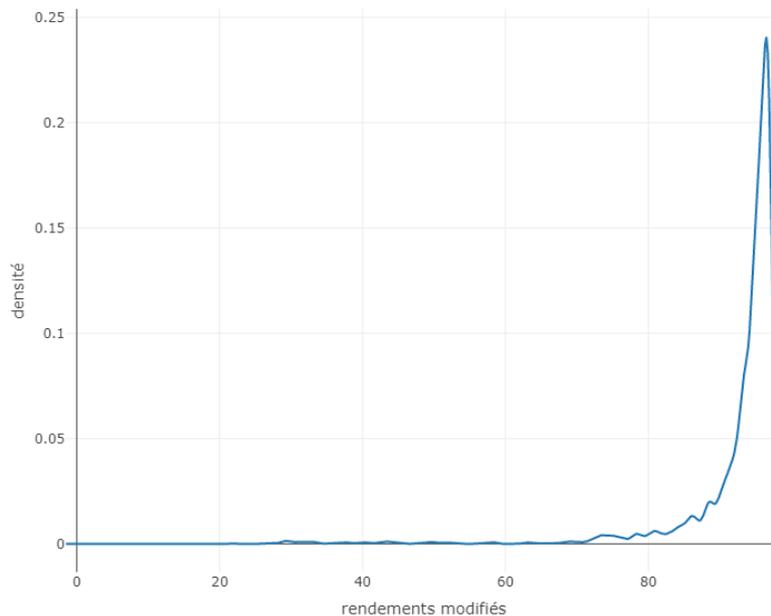


Figure A.5 Densité empirique de l'échantillon transformée

Cette transformation remplace le quantile à 0.5% par le quantile à 99.5%. La preuve mathématique de ce changement se démontre facilement, car la transformation que nous appliquons à nos rendements est affine. Une fois le quantile à 99.5% obtenu, nous avons utilisé la transformation affine inverse pour revenir au quantile 0.5%, représentant ainsi notre choc.

1. Estimation du seuil de la GPD

La détermination d'un seuil pertinent pour le calibrage d'une loi GPD est une étape cruciale, abordée par diverses approches dans la littérature Thompson et al. (2009); Fateh et al. (2019); Caeiro and Gomes (2016).

Cette étude explore plusieurs méthodes d'estimation de seuil, notamment la fonction d'excès moyen (MEF), le diagramme de Hill et ses alternatives, ainsi que la procédure de Jon Danielsson (2016).

- **Mean Excess Function (MEF)** : L'analyse de la MEF, définie par $e(u) = E(X - u | X > u)$ où $u \geq 0$, révèle une pente négative, indiquant une distribution à queue légère caractéristique d'une loi de Pareto de type II Balkema and de Haan (1974).
- **Estimateur de Hill** : Le graphique de Hill montre une stabilité relative du paramètre de forme jusqu'à un seuil de 96, correspondant à une statistique d'ordre de 740.
- **Hill Plot Alternatives** : L'application de cette méthode sur les données transformées indique une stabilité du paramètre de forme ξ à partir d'un θ de 0.8, correspondant à un seuil de 96.60.
- **Procédure de Jon Danielsson** : Cette méthode, basée sur la minimisation de la distance maximale entre la queue ajustée de la loi GPD et les quantiles observés, donne des seuils de 97.16% et 96.50% pour 30% et 50% de l'échantillon, respectivement.

La synthèse de ces méthodes conduit à l'estimation d'un seuil optimal de 96.80% pour l'ajustement de la loi GPD.

2. Ajustement de la Loi GPD

L'ajustement de la famille de loi de Pareto à l'échantillon, utilisant le seuil de 96.80%, produit les paramètres optimaux suivants : $\sigma = 0.224$ et $\xi = -0.615$. Le paramètre de forme négatif

corrobore l'observation d'une queue légère, caractéristique d'une loi de Pareto de type II (Fateh et al. (2019)). Les graphiques d'ajustement, notamment le QQ-plot (Figure A.6), démontrent un bon ajustement de la loi Pareto II sur la queue droite de la distribution transformée.

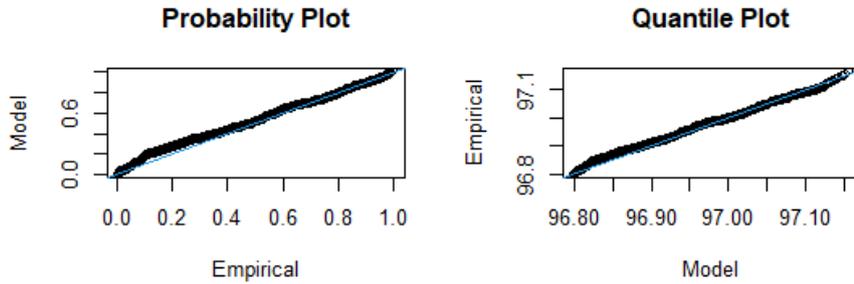


Figure A.6 Diagrammes de l'ajustement de la loi Pareto II

3. Calcul du Choc S2

Le calcul du quantile dans ce contexte nécessite une approche spécifique, car la loi de Pareto Type II modélise uniquement la queue droite de l'échantillon transformé. Pour être conforme à l'approche EIOPA, il est impératif d'inclure la partie non modélisée des données dans l'estimation du quantile paramétrique à 99.5%.

En s'appuyant sur l'étude de Abhay K. S. (2011), la formule suivante est utilisée pour le calcul de la $VaR_{0.5\%}$ en prenant l'ensemble des données :

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} (1 - \alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

avec,

- α l'ordre du quantile, ici 99,5%
- $(\hat{\sigma}, \hat{\xi})$ les paramètres estimés de la GPD
- n la taille de l'échantillon, N_u le nombre d'éléments au dessus du seuil et donc N_u/n l'estimateur empirique de la fonction de répartition.

L'application de cette formule résulte en une $VaR_{99.5\%}$ de 97,15%. Après transformation affine inverse, le choc est estimé à 81,9%. Cette valeur revêt une importance particulière, car elle cible spécifiquement la modélisation des scénarios défavorables de rendements, correspondant à la queue gauche de la distribution originale.

B Approche stochastique du calibrage du choc

B.1 Quelques éléments théoriques sur le modèle MSAR

Ici nous présentons de manière succincte quelques fondamentaux .

Prenons par exemple une distribution de log-rendements $r_t = \log\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)$ où y_t représente le cours du bitcoin au temps t , modélisée par un modèle MSAR(p,2), c'est-à-dire avec un ordre autorégressif de p et deux régimes (par exemple, forte volatilité et faible volatilité). Dans cette modélisation, les rendements r_t sont exprimés comme une combinaison linéaire des rendements passés, ajustée par des coefficients autorégressifs qui varient selon le régime en cours, et une erreur gaussienne ε_t .

$$r_t = \begin{cases} a_1 + \beta_{11}r_{t-1} + \dots + \beta_{p1}r_{t-p} + \varepsilon_t & \text{si } S_t = 1 \\ a_2 + \beta_{12}r_{t-1} + \dots + \beta_{p2}r_{t-p} + \varepsilon_t & \text{si } S_t = 2 \end{cases} \quad (3)$$

où S_t représente le régime au temps t ,

Les coefficients $a_1, a_2, \beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{p2}$ peuvent prendre des valeurs différentes selon le régime. Ce modèle, initié par Hamilton (1989), adapte les paramètres, tels que l'interception et les coefficients autorégressifs, en fonction du régime S_t .

Le régime S_t est modélisé par une chaîne de Markov à deux états, indépendamment de l'erreur e_t pour tous les instants t . Ainsi, le modèle MS-AR à deux régimes permet de capturer les fluctuations des rendements en fonction des conditions économiques, offrant ainsi une meilleure compréhension des périodes de volatilité et de stabilité du cours du bitcoin.

Ainsi, dans notre exemple de 2 régimes, S_1 (régime 1) est identifié comme la phase d'accumulation ou de distribution des rendements de l'ensemble du marché (r_t), tandis que S_2 (régime 2) incarne la phase d'excès ou de panique des rendements de l'ensemble du marché (r_t).

Les transitions entre les régimes S_t sont supposées être ergodiques et complexes, suivant un processus de Markov du 1^{er} ordre. Cela implique que les impacts des observations antérieures sur les rendements r_t et les régimes sont entièrement reflétés dans les observations récentes des régimes r_t , comme décrit dans l'équation (4) :

$$P_{ij} = \text{Prob}(S_t = j | S_{t-1} = i) \quad \forall i, j = 1, 2 \text{ et } \sum_{i=1}^2 \rho_{ij} = 1 \quad (4)$$

La matrice P , également appelée matrice de transition, encapsule les probabilités de changement :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

où $P_{11} + P_{12} = 1$ et $P_{21} + P_{22} = 1$.

Plus la probabilité ρ_{ij} est proche de 1, plus de temps est nécessaire pour passer au régime suivant. Les éléments diagonaux de la matrice des probabilités de transition dans l'équation (5) renferment des informations cruciales sur la durée attendue de l'état du régime.

B.2 Calibration du modèle MSAR

B.2.1 Sur l'historique journalier les log-prix

Nous calibrons le modèle sur le log-prix journalier (Figure B.7) du bitcoin sur un historique de 12 ans (4383 observations journalières).



Figure B.7 Evolution du log-prix journalier du bitcoin

1. Vérification des hypothèses d'applicabilité du modèle MSAR

L'analyse de la trajectoire du log-prix révèle une tendance croissante et une non-stationnarité, confirmée par les tests KPSS et ADF. Cette caractéristique n'entrave pas l'application du modèle MSAR, adapté aux données non stationnaires.

Un test d'hétéroscédasticité a été effectué pour détecter la présence de l'effet ARCH, caractérisé par une dépendance conditionnelle de la variance aux valeurs antérieures. Les résultats ont rejeté l'hypothèse nulle d'homoscédasticité avec une p-value inférieure à 1%.

Ces analyses confirment que toutes les conditions requises sont satisfaites pour l'application du modèle MSAR à la série de log-prix.

La procédure de calibrage du modèle a été structurée comme suit : les 365 derniers points d'observation (correspondant à la dernière année) ont été réservés pour le backtesting du modèle, tandis que le reste de l'échantillon a servi de base d'entraînement.

L'estimation des hyper-paramètres du modèle, incluant les composantes AR et MS, a été réalisée de manière séquentielle. Dans un premier temps, nous avons estimé le paramètre de la composante auto-régressive (AR) du modèle. Ensuite, nous avons procédé à l'estimation du nombre d'états optimal pour la composante chaîne de Markov (MS).

2. Estimation des hyper-paramètres des composante AR et MS

Pour estimer le paramètre de la composante AR, il est courant d'analyser les autocorrélogrammes. L'autocorrélogramme sert à analyser les séries temporelles dans le cadre d'une approche autoregressive. Il existe deux types d'autocorrélogrammes : simple et partiel. L'autocorrélation simple (ou autocovariance) d'une série indique que la mesure d'un phénomène à un instant t peut être corrélée avec ses mesures antérieures (aux temps $t-1$, $t-2$, $t-3$, etc.). L'autocorrélation partielle, quant à elle, mesure l'autocorrélation d'un signal pour un décalage k , 'indépendamment' des autocorrélations pour les décalages inférieurs.

Ci-dessous les figures de l'autocorrélogramme B.8 simple et partiel de notre échantillon de log-prix.

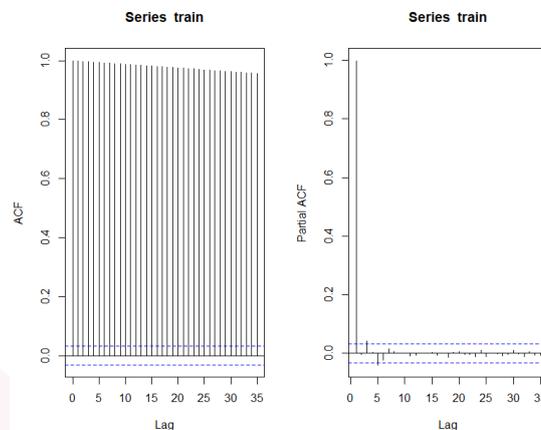


Figure B.8 Autocorrélogrammes simple et partiel

Les autocorrélations simples (graphique à gauche) sont décroissantes en fonction du retard, cela signifie qu'il y'a moins en moins de dépendance du log-prix de l'instant d'observation aux phénomènes des instants précédents.

Les autocorrélations partielles sont quasi-nulles à partir de l'ordre 3. On observe un pic positif très significatif en 1, puis un autre pic significatif en 3. Ce qui est suffisant pour mettre en avant trois modèles AR candidats : AR(1), AR(2) et AR(3).

L'hyper-paramètre de la composante chaîne de Markov définit le nombre d'états de la chaîne de Markov. Nous avons testé les modèles à deux MS(2) et à trois régimes MS(3). Un MS(3) se traduit par des volatilités forte, moyenne et faible. L'objectif ici est de constater quelle configuration de nombre de régimes s'adapte au mieux à la volatilité du prix du bitcoin.

En combinant les modèles sélectionnés pour les deux composantes, nous obtenons six modèles candidats à évaluer et à comparer : MS(2)-AR(1), MS(2)-AR(2), MS(2)-AR(3), MS(3)-AR(1), MS(3)-AR(2) et MS(3)-AR(3). Nous avons sélectionné le modèle qui présente le critère AIC le plus faible.

Le tableau B.4 présente les 6 modèles calibrés avec leur AIC correspondant.

Modèles	MSAR(2,1)	MSAR(2,2)	MSAR(2,3)	MSAR(3,1)	MSAR(3,2)	MSAR(3,3)
AIC	-13768.80	-13765.89	-13811.88	-14358.94	-14366.65	-14392.10

Table B.4 AIC des modèles candidats

Dans ce tableau, le modèle MS(3)-AR(3) affiche l’AIC le plus faible parmi les cinq modèles, avec une valeur de -14392.10, suggérant qu’il offre un meilleur équilibre entre l’ajustement du modèle et sa complexité. Ainsi, le modèle MS(3)-AR(3) est préférable selon le critère AIC.

3. Calibration du modèle MSAR(3,3)

Le modèle MS(3)-AR(3) a été calibré sur la base d’entraînement. Les paramètres optimaux du modèle ainsi calibrés sont présentés dans le tableau B.5 :

	β_0	β_1	β_2	β_3	σ
Régime1	$1.63 e^{-03}$	0.91	0.05	0.04	$1.67 e^{-04}$
Régime2	$9.33 e^{-03}$	1.00	$-5.72 e^{-04}$	$-5.64 e^{-04}$	$2.27 e^{-03}$
Régime3	$3.01 e^{-02}$	1.07	-0.50	0.42	$3.43 e^{-02}$

Table B.5 Coefficient de la composante auto-régressive

Nous représentons ci-dessous la trajectoire réelle de l’indice logarithmique tiré de notre échantillon, ainsi que les différents régimes estimés par le modèle :

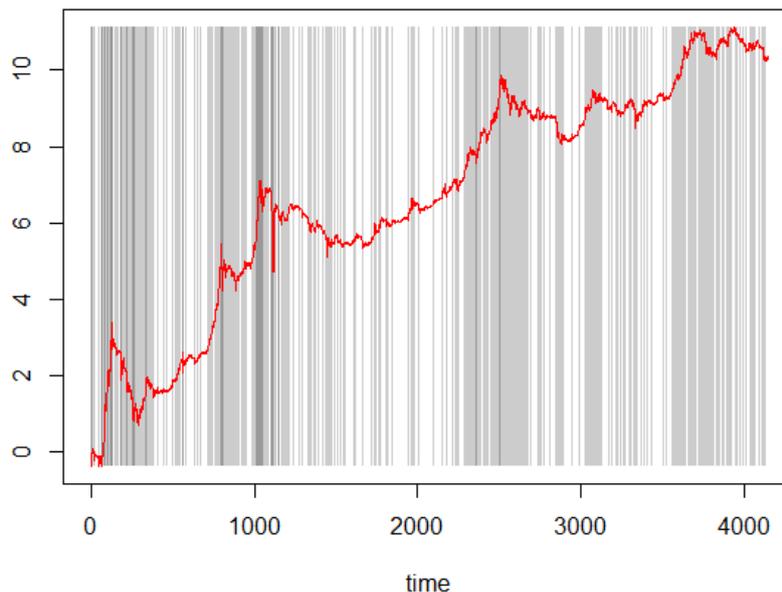


Figure B.9 Régimes estimés par le modèle sur la trajectoire réelle de l’indice logarithmique

L'analyse de cette figure permet de déduire que :

- Le régime 1 estimé par l'algorithme correspond aux phases de faible volatilité (zone blanche)
- Le régime 2 correspond aux phases de moyenne volatilité (zone gris clair)
- Le régime 3 correspond aux phases de forte volatilité (zone grise foncée)

Cette interprétation est corroborée par le paramètre σ , qui est plus important pour le troisième régime. On constate également que lorsque le régime est dans l'état 3, la trajectoire de la variable observable est plus volatile que dans les régimes 1 ou 2. Le modèle démontre ainsi sa capacité à détecter efficacement les différents régimes de volatilité dans la dynamique du bitcoin.

La matrice de transition entre les 3 régimes de volatilité du log-prix est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 80.97\% & 19.03\% & 0.00\% \\ 15.09\% & 83.04\% & 1.87\% \\ 0.00\% & 16.92\% & 83.08\% \end{pmatrix}$$

Matrice des probabilités de transition

Cette matrice de transition illustre les probabilités de transition d'un état à un autre sur une base quotidienne. Chaque élément de cette matrice montre la probabilité de passer de l'état de la ligne à celui de la colonne correspondante. La probabilité de rester dans le même état sur une base quotidienne est relativement élevée : 80.97%, 83.04% et 83.08% pour les trois régimes respectivement. Cela suggère une certaine stabilité ou inertie du système.

Néanmoins, les probabilités de transition vers d'autres états ne sont pas négligeable. Par exemple, la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 est de 19.03%. De même, les transitions de l'état 2 vers l'état 1 et de l'état 3 vers l'état 1 sont faibles, avec des valeurs de 15.09% et 16.92% respectivement. Les transitions entre l'état 2 et l'état 3 sont légèrement plus élevées que les autres transitions, avec des valeurs de 1.87% et 16.92%. Cela suggère une certaine interconnexion entre ces deux états.

Cette matrice de transition indique une certaine stabilité dans chaque état, avec des transitions relativement peu fréquentes entre les états mais des transitions légèrement plus fréquentes entre les états 2 et 3.

B.2.2 Sur l'historique journalier les log-rendements

Ici, nous appliquons le modèle MS-AR à la série temporelle stationnaire des log-rendements pour tester la stabilité des résultats obtenus sur les log-prix. On modélise les log-rendements plutôt que les rendements relatifs, car la transformation log permet d'avoir des processus de Lévy, utiles pour l'ajustement des modèles stochastiques.

1. Vérification des hypothèses d'applicabilité du modèle MSAR

Comme pour les log-prix, nous avons réalisé les tests de stationnarité et d'hétéroscédasticité sur l'échantillon de log-rendement et validé l'applicabilité du modèle MSAR sur le échantillon.

2. Hyper-paramètres des composantes AR et MS

On trace les autocorrélogrammes simple et partiel de notre distribution log-rendement.

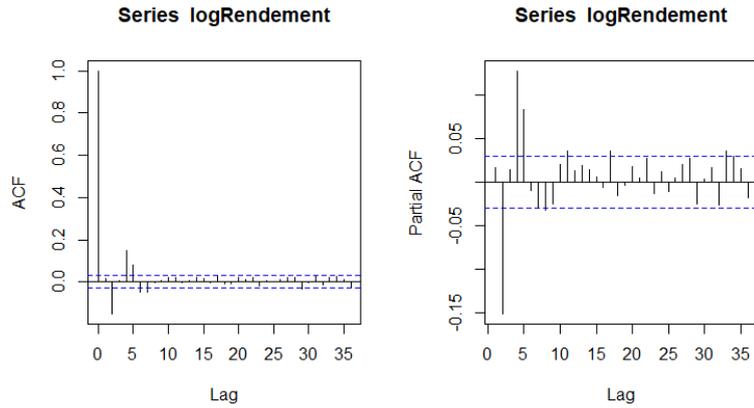


Figure B.10 Autocorrélogrammes simple et partiel

Les autocorrélations simples sont en fonction du retard et tendent rapidement vers 0, cela suggère qu'il y'a très peu de dépendance du log-rendement de l'instant d'observation aux phénomènes des instants précédents. Le coefficient d'autocorrélation partiel de retard à l'instant $t = 5$ est le dernier coefficient qui dépassent de loin le seuil d'acceptation (plage délimité par les traits bleus). Nous retiendrons donc l'ordre maximal 5 pour la composante AR du modèle.

Pour la composante MS, quand bien même l'AIC pénalise le nombre de paramètre à estimer, le modèle MS(3)-AR(5) est celui qui minimise l'AIC, donc nous retiendrons ce modèle.

3. Calibration du modèle MSAR(3,5)

Suite à la validation des hyper-paramètres modèle MS(3)-AR(5), nous présentons les paramètres optimaux estimés de ce modèle :

	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	σ
Régime1	0.001	-0.094	-0.032	0.010	-0.022	-0.018	1.12 e^{-04}
Régime2	0.003	-0.005	-0.003	-0.002	0.014	0.053	1.83 e^{-03}
Régime3	5.39 e^{-04}	0.072	-0.32	0.067	0.339	0.157	2.76 e^{-02}

Table B.6 Paramètres optimaux du modèle MSAR(3,5)

Nous représentons ci-dessous la série de log-rendement tirée de notre échantillon, ainsi que les différents régimes estimés par le modèle :

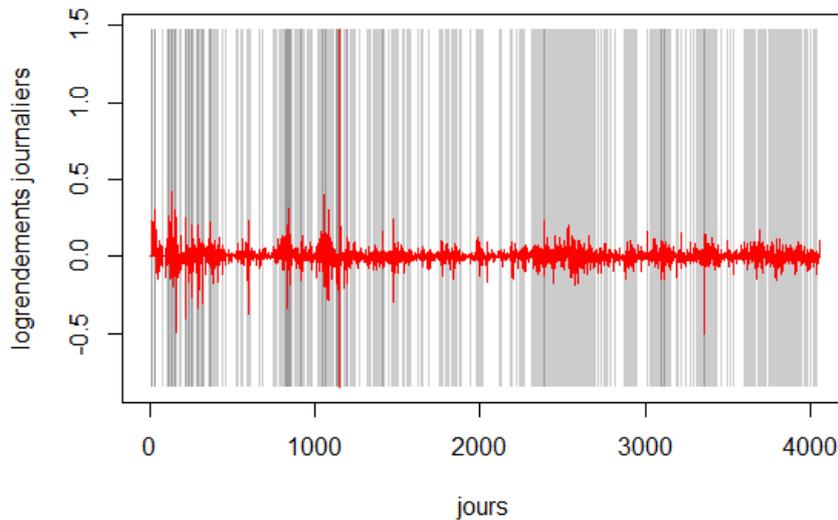


Figure B.11 Régimes estimés par le modèle sur la série des log-rendements

Ci-après la matrice des probabilités de transition estimée par le modèle sur la série des log-rendements.

$$P = \begin{pmatrix} 77.45\% & 21.68\% & 0.8\% \\ 14.77\% & 83.22\% & 2.0\% \\ 0.06\% & 20.22\% & 79.20\% \end{pmatrix}$$

Matrice des probabilités de transition

L'analyse de la Figure B.11 et de la matrice de transition du modèle MSAR(3,5) appliqué sur les log-rendements révèle des similitudes notables avec l'approche sur les log-prix :

- Les probabilités de transition entre les états sont quasi-similaires à celles observées dans l'approche sur les log-prix.
- Les 3 régimes correspondent aux mêmes phases de volatilité :
 - Régime 1 : période de faible volatilité
 - Régime 2 : période de volatilité moyenne
 - Régime 3 : période de forte volatilité
- Le paramètre σ présenté dans la Table B.6 confirme cette interprétation des régimes.

Cette cohérence entre les deux approches (log-prix et log-rendements) renforce la robustesse de notre analyse et la pertinence du modèle MSAR(3,5) pour caractériser la dynamique de volatilité du bitcoin.

B.3 Backtesting du modèle MSAR

B.3.1 Backtesting du modèle MSAR ajusté sur les log-prix

Nous avons fait un backtesting du modèle MS(3)-AR(3). Nous avons initialement prédit 365 valeurs de log-prix avec le modèle, et le RMSE calculé sur notre échantillon observé est de 0.035, ce qui signifie que l'erreur moyenne du modèle est de $exp(0.035) = 1.035$ EUR. On observe que les prix prédits sont en adéquation avec les prix observés comme l'illustre le graphique B.12.



Figure B.12 Prédictions vs observations sur l'échantillon de backtesting

Pour valider notre modèle, nous avons procédé à un backtesting en vérifiant sa capacité à simuler des trajectoires cohérentes avec celle du bitcoin. Nous avons généré 1000 trajectoires du log-prix du bitcoin en utilisant le modèle calibré sur la dernière année de l'échantillon, puis vérifié si la trajectoire observée de cette même année était incluse dans le cône de simulation.

Pour des raisons de lisibilité, le graphique ci-dessous présente uniquement cinq trajectoires sélectionnées aléatoirement parmi les mille projections. Les trajectoires définissant les limites du cône de simulation (minimales et maximales) ont été choisies en identifiant celles ayant le plus grand nombre de points supérieurs (ou inférieurs) par rapport aux autres trajectoires simulées. Il convient de noter que certaines trajectoires peuvent occasionnellement se situer au-delà de ces limites à certains points d'observation.

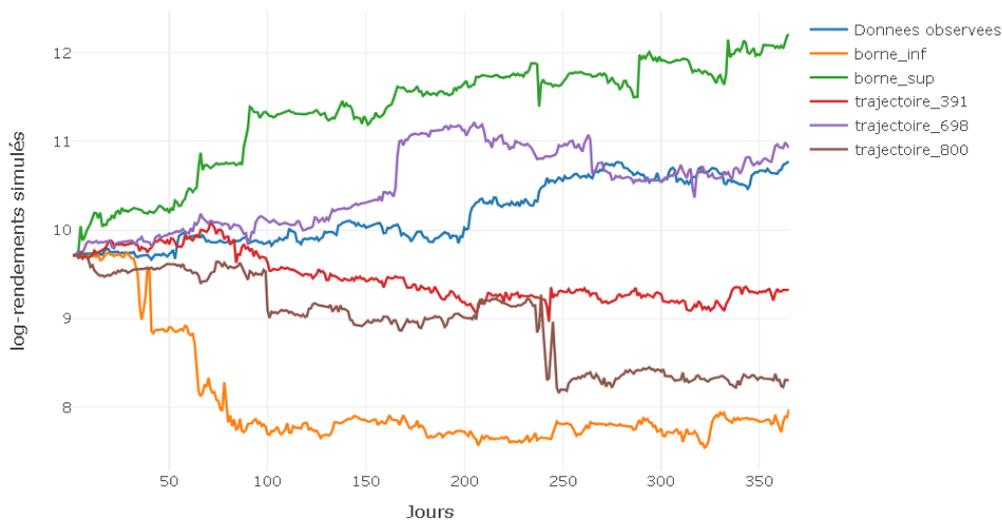


Figure B.13 Cône de validation du modèle

L'analyse de la Figure B.13 révèle que la trajectoire observée se situe bien à l'intérieur du cône de simulations. De plus, le modèle a prédit les prix observés avec une marge d'erreur très faible. Ces résultats confirment la fiabilité du modèle pour générer des scénarios de prix du bitcoin en conditions réelles.

B.3.2 Backtesting du modèle MSAR ajusté sur les log-rendements

Le RMSE calculé avec les 365 points tests est de 0.094. Donc l'erreur quadratique moyenne de rendement est d'environ 10%. Cela n'est pas négligeable comparé au RMSE qu'on a pu observé avec les log-prix. La Figure B.14 ci-dessous met en exergue la qualité de prédiction du modèle.

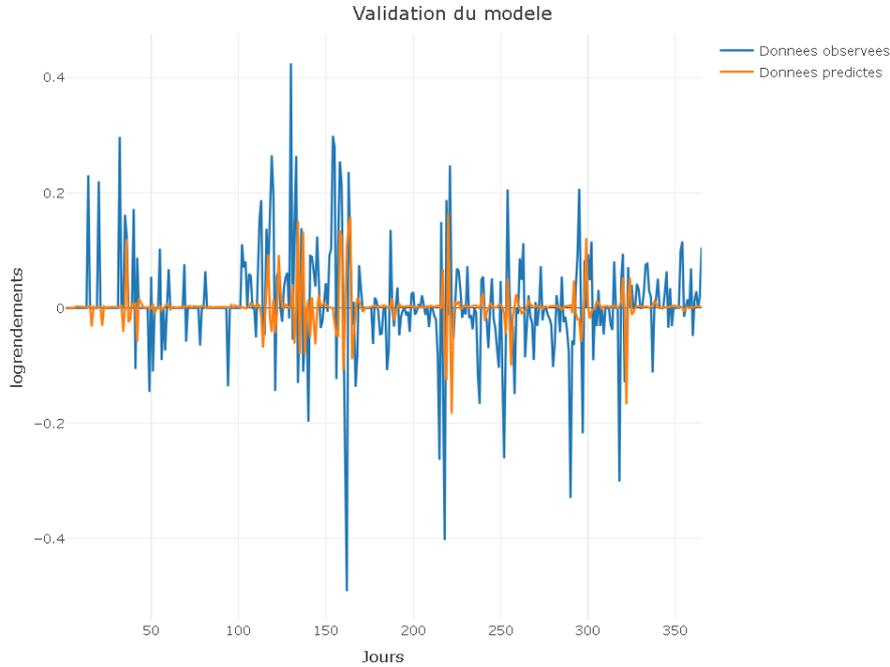


Figure B.14 Prédications vs observations sur l'échantillon de backtesting

Comme avec le modèle ajusté sur les log-prix, nous simulons 1 000 trajectoires de rendements logarithmiques.

Pour dessiner un cône de simulation de prix, on se ramène aux prix du bitcoin avec les trajectoires log-rendements simulées selon la relation suivante :

$$Prix_j = Prix_{initial} \times (1 + r^{(j)}) = Prix_{initial} \times \prod_{i=1}^j (1 + r_i)$$

$$Prix_j = Prix_{initial} \times \prod_{i=1}^j \left(1 + \overbrace{\left(\exp\left(\log\left(\frac{Prix_{jour+1}}{Prix_{jour}}\right)\right)\right)}^{\hat{r}_i} - 1\right)$$

$$Prix_j = Prix_{initial} \times \prod_{i=1}^j (\exp(\hat{r}_i))$$

avec,

- r_i = rendement relatif journalier,
- \hat{r}_i = log-rendement journalier,
- $r^{(j)}$ = le rendement observé sur la période $[1, j]$.

Afin d'améliorer la lisibilité du graphique, nous avons sélectionné et affiché aléatoirement cinq trajectoires parmi les 1 000 simulations réalisées. De plus, les deux trajectoires délimitant le cône de confiance ont été représentées. L'ensemble des données a été transformé en échelle logarithmique afin de permettre une comparaison directe avec la première approche stochastique appliquée aux log-prix. Enfin, la trajectoire observée des prix, également mise à l'échelle logarithmique, a été incluse sur le graphique.

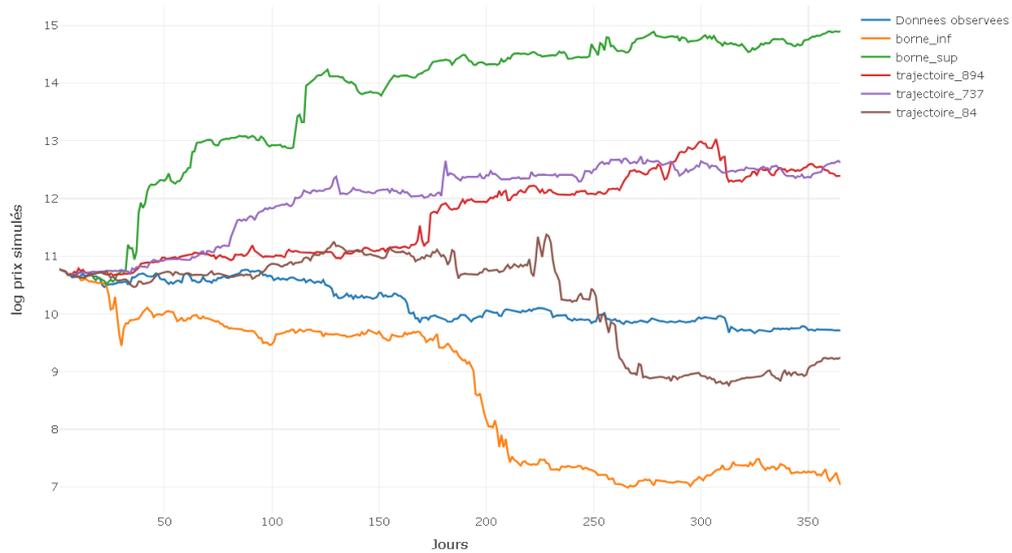


Figure B.15 Cône de validation : Échelle normale Vs Échelle logarithmique

L'analyse du graphique à l'échelle logarithmique révèle que la trajectoire observée (en bleu) se situe à l'intérieur du cône de simulations. Bien que le RMSE soit plus élevé que pour le modèle ajusté sur les log-prix, ce résultat indique que notre modèle ne génère pas de trajectoires incohérentes avec les observations réelles.

Nexialog Consulting est un cabinet de conseil spécialisé en Banque et en Assurance. Organisés autour de 3 domaines d'activité - Risques Bancaires, Financiers & Assurantiels - nous intervenons au sein des équipes métiers afin de les accompagner depuis le cadrage jusqu'à la mise en œuvre de leurs projets. Associant innovation et expertise, le savoir-faire de notre cabinet a permis de consolider notre positionnement sur ce segment et de bénéficier d'une croissance forte et régulière.

Les besoins de nos clients étant en constante évolution, nous nous adaptons continuellement pour proposer le meilleur accompagnement. Le département R&D de Nexialog Consulting se donne pour objectif de proposer des solutions innovantes à des problématiques métier ou d'actualité. Pour cela, nous nous appuyons sur des bibliothèques internes et sur le travail de nos consultants. Le pôle R&D Nexialog a également pour mission de former les collaborateurs sur l'évolution des techniques et la réglementation en lien avec leur activité.

Site web du cabinet : <https://www.nexialog.com>

Publications : <https://www.nexialog.com/publications/>

Contacts

Ali BEHBAHANI
Associé, Fondateur
Tél : + 33 (0) 1 44 73 86 78
Email : abehbahani@nexialog.com

Christelle BONDOUX
Associée, Directrice commerciale
Tél : + 33 (0) 1 44 73 75 67
Email : cbondoux@nexialog.com

Areski COUSIN
Directeur scientifique R&D
Email : acousin@nexialog.com